

Правительство Российской Федерации

**Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики**

**Факультет Менеджмента
Кафедра высшей математики**

Программа дисциплины
Основы высшей математики
для направления 080200.62 «Менеджмент» подготовки
бакалавра

Автор: Доктор ф.-м.н., профессор, академик
Российской Академии естественных наук
Е.В. Коваленко (ekovalenko@hse.ru)

Москва 2011

Пояснительная записка

Автор программы: Доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской Академии естественных наук Е.В. Коваленко.

Требования к студентам: Курс «Основы высшей математики» читается параллельно основному курсу «Математика(линейная алгебра и математический анализ)» и не требует дополнительных знаний, выходящих за рамки программы общеобразовательной средней школы.

Цели курса: Факультативный курс «Основы высшей математики» является дополнительным к обязательному курсу «Математика(линейная алгебра и математический анализ)», закладывающему математическую базу для освоения студентами предметов, использующих в качестве инструментария математику. Факультатив рассчитан на слушателей, имеющих недостаточную школьную подготовку по математике и испытывающих трудности при изучении высшей математики. Курс состоит из вводной элективной части, предназначенной для устранения пробелов в знании школьной математики, и части, обращенной к высшей математике и предлагающей иногда упрощенный, иногда расширенный взгляд на соответствующие ее разделы.

Учебные задачи курса: В результате изучения курса «Основы высшей математики» студенты должны:

- восполнить знания из школьной программы по математике для получения возможности полноценного освоения курса «Математика(линейная алгебра и математический анализ)»;
- освоить наиболее сложные моменты основного курса;
- более полно понять логику, структуру и взаимосвязь между всеми разделами курса «Математика(линейная алгебра и математический анализ)»;
- научиться использовать математический аппарат при анализе и моделировании простейших экономических задач.

Тематический план курса «Математика(линейная алгебра и математический анализ)»

№ п/п	Наименование тем	Всего часов по дисциплине	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1	Основные сведения из школьной математики	8	2		6
2	Матрицы и определители	8		2	6

3	Системы линейных алгебраических уравнений (методы Крамера и Гаусса)	16	2	2	12
4	Основы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве	18	2	2	14
5	Элементы матричного анализа	10	2		8
6	Функции одной переменной: основы теории пределов, непрерывность, дифференцируемость	11	1	2	8
7	Исследование функций одной переменной и построение их графиков по характерным точкам	11	1	2	8
8	Функции нескольких переменных: частные производные, дифференциал. Экстремумы функций нескольких переменных	16	2	2	12
9	Интегрирование. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений	10	2		8
Итого:		108	14	12	82

Базовый учебник:

Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. М.: Дело, 2000.

Разделы I: Основы математики.

Формы контроля знаний студентов

По дисциплине «Основы высшей математики» предусмотрен дифференцированный зачет. С этой целью, в конце третьего модуля, проводится аудиторная зачетная контрольная работа, по результатам которой выставляется зачет и оценка за факультативный курс. Оценка выставляется в 5-ти балльной и 10-ти балльной шкалах в ведомость и зачетную книжку студента. Перевод из одной шкалы в другую осуществляется согласно следующему правилу:

$0 \leq B < 4$	неудовлетворительно;
$4 \leq B < 6$	удовлетворительно;
$6 \leq B < 8$	хорошо;
$8 \leq B < 10$	отлично.

Содержание программы

Тема 1. Основные сведения из школьной математики

Вычисления с дробями, степенями, радикалами и логарифмами. Понятия модуля числа и арифметического корня. Формулы сокращенного умножения. Преобразование иррациональных выражений. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Треугольник Паскаля, бином Ньютона. Выделение полного квадрата, решение квадратных уравнений. Деление многочленов, теорема Безу и решение уравнений с целыми степенями. Формулировка основной теоремы алгебры. Решение рациональных неравенств методом интервалов. Решение неравенств, содержащих знак абсолютной величины. эквивалентность.

Тема 2. Матрицы и определители

Матрицы, операции над ними и их свойства.

Определитель матрицы. Свойства определителей. Способы вычисления определителей 2-го и 3-го порядков. Миноры и алгебраические дополнения, их связь с определителем матрицы.

Способы нахождения обратной матрицы и решение простейших матричных уравнений.

Тема 3. Системы линейных алгебраических уравнений (методы Крамера и Гаусса)

Метод Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и условия его реализации.

Треугольный вид СЛАУ и ее решение методом обратного хода. Примеры исследования и решения СЛАУ методом Гаусса (способом исключения неизвестных).

Тема 4. Основы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве

Векторы как геометрические объекты на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами. Условия коллинеарности и компланарности векторов.

Скалярное произведение векторов в R^3 и его свойства. Длина вектора. Расстояние. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами. Условия перпендикулярности векторов.

Базис на плоскости и в пространстве. Ортогональный базис. Разложение вектора по базису. Операции над векторами, заданными своими координатами.

Различные формы уравнения прямой на плоскости. Расстояние между параллельными прямыми и от точки до прямой. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Понятие о полярной системе координат.

Прямая и плоскость в R^3 , способы их задания. Расстояния от точки до плоскости и между параллельными плоскостями. Углы между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.

Тема 5. Элементы матричного анализа

Арифметические векторы как частный случай матриц и действия с ними. Векторное пространство R^n . Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис в R^n . Ортогональный базис. Разложение векторов. Преобразование координат точки при переходе к новому базису. Матрица перехода.

Разложение общего решения однородной СЛАУ по векторам ее фундаментальной системы. Общий вид решений однородных и неоднородных СЛАУ.

Линейные операторы и их матрицы в R^n . Связь матрицы линейного

оператора с матрицей перехода к новому базису.

Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Базис пространства R^n из собственных векторов линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы самосопряженных операторов (симметрических матриц). Приведение квадратичных форм к главным осям ортогональным преобразованием.

Тема 6. Функции одной переменной: основы теории пределов, непрерывность, дифференцируемость

Определение функции. Способы задания функций. Свойства функций: монотонность, ограниченность, четность, периодичность. Сложная функция. Обратная функция. Основные элементарные функции и их графики.

Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Свойства функций, имеющих предел. Непрерывность функции. Непрерывность основных элементарных функций.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их взаимосвязь. Замечательные пределы. Типы неопределенностей и их раскрытие. Сравнение бесконечно малых. Символы Ландау «о» и «О». Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.

Производная функции и основные правила дифференцирования (обзор теорем школьного курса). Таблица производных. Производные функций, заданных неявно и параметрически. Логарифмическое дифференцирование.

Дифференциал функции. Связь дифференциала с производной. Геометрический смысл дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Применение правила Лопиталя и формулы Тейлора для вычисления пределов функций.

Тема 7. Исследование функций одной переменной и построение их графиков по характерным точкам

Преобразование графиков функций.

Условия возрастания и убывания функций. Точки экстремума. Необходимые и достаточные признаки существования экстремума. Исследование функций на экстремум с помощью производных высших порядков. Исследование функций на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Асимптоты кривых. Общая схема построения графиков функций.

Тема 8. Функции нескольких переменных: частные производные, дифференциал. Экстремумы функций нескольких переменных

Функции нескольких переменных. Область определения. Линии и

поверхности уровня. Предел функции. Непрерывность.

Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Однородные функции и их дифференцирование. Теорема Эйлера. Производная неявной функции. Частные производные неявной функции.

Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Второй дифференциал функции нескольких переменных как квадратичная форма от дифференциалов ее независимых переменных. Матрица Гессе. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных.

Условный экстремум. Метод исключения переменных и метод множителей Лагранжа. Геометрическая интерпретация задачи об отыскании условного экстремума в случае функции двух переменных. Глобальные экстремумы. Понятие о выпуклых функциях нескольких переменных.

Тема 9. Интегрирование. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.

Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла: интегрирование по частям и подстановкой. Несобственные интегралы первого и второго рода. Приложения интегралов к вычислению площадей плоских фигур и объемов тел вращения.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Понятие об особых решениях дифференциальных уравнений. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Библиографический список

Основная литература:

1. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: Учебное пособие. М.: Изд-во ГУ-ВШЭ, 2007.
2. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Яковлев Г.Н. Математика. Алгебра и

элементарные функции: Учебное пособие. Ч.1 / Под ред. Г.Н. Яковлева. М: Агар,1999.

3. Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики: Учебник. М.: ИД ФБК-ПРЕСС,2005.
4. Кузнецов Б.Т. Математика: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие/ Под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М,2001.
6. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

Дополнительная литература:

7. Высшая математика для менеджера: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Лебедева. М.: Финстатинформ, 1999.
8. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998.
9. Грес П.В. Математика для гуманитариев: Учебное пособие. М.: Юрайт,2000.
10. Григорьев С.Г. Линейная алгебра: Учебное пособие по высшей математике. М: ИВЦ Маркетинг, 1999.
11. Григорьев С.Г. Векторная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие по высшей математике. М.: ИВЦ Маркетинг, 2000.
12. Замков О.О.,Черемных Ю.Н., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике: Учебник. М.: Дело и Сервис,1999.
13. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика: Решебник. М.: Физматлит, 2000.
14. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов: Учебник. СПб.: Лань, 2001.
15. Коваленко Е.В. Высшая математика для экономических специальностей: Учебно-методическое пособие // Сайт ГУ-ВШЭ, 2010.

16. Коваленко Е.В., Попов В.Ю. Алгебра и анализ: Учебно-методическое пособие. М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2002.
17. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: Учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 1998.
18. Коршунова Н.И., Плясунов В.С. Математика в экономике. М.: Вита-Пресс, 1996.
19. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989.
20. Кустов Ю.А., Юмагулов М.Г. Математика. Основы математического анализа: теория, примеры, задачи. Домашний репетитор для студентов. М.: Рольф, Айрис-пресс, 1998.
21. Малыхин В.И. Математика в экономике: Учебное пособие: М.: ИНФРА-М, 1999.
22. Математика: Большой справочник для школьников и поступающих в вузы / Д.И. Аверьянов, П.И. Алтынов, И.И. Баврин и др.: М. Дрофа, 2000.
23. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. СПб.: Лань, 2001.
24. Письменный Д.Т. Высшая математика. 100 экзаменационных ответов. 1 курс. Домашний репетитор для студентов. М.: Рольф: Айрис-пресс, 1999.
25. Практикум по высшей математике для экономистов: Учебное пособие для вузов / Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Путко Б.А. и др.; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
26. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике: Учебник. В 2 ч. Ч.1. М.: Финансы и статистика, 2000.
27. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике: Учебник. В 2 ч. Ч.2. М.: Финансы и статистика, 1999.
28. Сюдсетер К., Стрем А., Берк П. Справочник по математике для экономистов. СПб.: Экономическая школа, 2000.
29. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Гуманитариям о математике. Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. М.: Агар, 1999.

30. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учебное пособие. М.: Дело, 2000.
31. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1998.
32. Шипачев В.С. Основы высшей математики: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1998.
33. Anthony M., Biggs N. Mathematics for Economics and Finance. Methods and Modelling. Cambridge: CUP, 1996.
34. Chiang A. C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. N.Y.: McGraw – Hill, 1984.
35. Fuente A. Mathematical Methods and Models for Economists. Cambridge: CUP, 2000.
36. Simon C.P., Blume Z. Mathematics for Economists. W.W. Norton and Company, 1994.

**Вопросы для оценки качества освоения дисциплины
«Основы высшей математики»**

1. Вычисления с дробями, степенями и радикалами. Формулы сокращенного умножения.
2. Определение модуля числа. Операция извлечения корня. Преобразование иррациональных выражений.
3. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
4. Треугольник Паскаля, бином Ньютона.
5. Выделение полного квадрата. Решение квадратных уравнений и неравенств.
6. Деление многочленов. Целые корни многочленов.
7. Логарифмы. Основные формулы.
8. Решение неравенств, содержащих знак модуля.
9. Матрицы, операции над ними и их свойства.
10. Определитель матрицы. Свойства определителей.
11. Миноры и алгебраические дополнения. Их связь с определителем матрицы.
12. Формулы Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. Условия их применимости.
13. Обратная матрица и методы ее вычисления.
14. Решение матричных уравнений.
15. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли о совместности СЛАУ.
16. Вычисление ранга матрицы методом приведения ее к треугольному виду.

17. Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы. Теорема о базисном миноре.
18. Метод Гаусса решения СЛАУ. Базисные и свободные переменные. Однородная СЛАУ, свойства ее решений.
19. Векторное пространство R^n . Линейные операции над векторами и их свойства. Линейная зависимость и независимость векторов в R^n .
20. Размерность и базис векторного пространства. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису.
21. Преобразование пространства. Линейное преобразование. Матрица преобразования.
22. Нахождение матрицы линейного преобразования, являющегося произведением двух линейных преобразований, матрицы которых известны.
23. Собственные значения и собственные векторы матрицы (линейного оператора).
24. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
25. Евклидово пространство. Скалярное произведение векторов и его свойства. Вычисление длины вектора и угла между векторами.
26. Неравенство Коши-Буняковского в общем виде и, в частности, для пространства R^n .
27. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Нахождение расстояния от точки до прямой и точки пересечения двух непараллельных прямых.
28. Кривые второго порядка: эллипс, окружность, гипербола, парабола. Полярная система координат.
29. Общее уравнение плоскости в пространстве, нормальный вектор плоскости.
30. Частные случаи общего уравнения плоскости.
31. Вычисление расстояния от точки до плоскости, угла между плоскостями, расстояния между параллельными плоскостями.
32. Прямая в пространстве, способы ее задания. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых в пространстве.
33. Геометрический смысл неравенства первой степени с двумя и тремя переменными.
34. Определения функций одной и нескольких переменных. Область определения, способы задания функций.
35. Графики основных элементарных функций. Основные характеристики поведения функции. Линии уровня.
36. Экономические функции: спроса, предложения, полезности. Производственная функция.
37. Числовая последовательность и ее предел. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, связь между ними.
38. Основные теоремы о пределах функций. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о пределе промежуточной функции. Первый и

- второй замечательные пределы и их следствия.
39. Непрерывность функции одной переменной в точке и на отрезке. Точки разрыва функций и их классификация.
 40. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.
 41. Задачи, приводящие к понятию производной функции. Производная, ее механический, геометрический и экономический смысл (предельное значение, среднее значение функции, эластичность и ее геометрический смысл).
 42. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Основные правила дифференцирования.
 43. Таблица производных основных элементарных функций. Производные высших порядков.
 44. Производные сложной и обратной функций. Производные функции, заданной параметрически и неявной функции.
 45. Дифференциал функции и его приложение к приближенным вычислениям. Второй дифференциал.
 46. Применение правила Лопиталя и формулы Тейлора для вычисления пределов функций.
 47. Условия возрастания и убывания функции.
 48. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
 49. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
 50. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.
 51. Графики основных элементарных функций. Преобразование графиков функций.
 52. Общая схема исследования функций и построение их графиков по характерным точкам.
 53. Функции нескольких переменных, предел и непрерывность.
 54. Частные производные, их геометрический смысл на примере функций двух переменных.
 55. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке. Полный дифференциал. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости.
 56. Частные и полные производные сложной функции нескольких переменных. Производная по направлению и градиент.
 57. Геометрический смысл полного дифференциала. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.
 58. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.
 59. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума.
 60. Условный экстремум. Методы подстановки и множителей Лагранжа. Геометрическая интерпретация.
 61. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции нескольких переменных в ограниченной, замкнутой области.
 62. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных

неопределенных интегралов.

63. Основные способы интегрирования: метод замены переменной, интегрирование по частям.
64. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование. Интегралы от рациональных дробей.
65. Интегрирование тригонометрических функций и простейших видов иррациональностей.
66. Определенный интеграл, его геометрический смысл и основные свойства.
67. Классы интегрируемых функций и формула Ньютона-Лейбница.
68. Методы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.
69. Геометрические и экономические приложения определенного интеграла.
70. Несобственные интегралы первого и второго рода: определение и способы вычисления.
71. Признаки сравнения исследования сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций.
72. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия: порядок, решение, общее и частное решения. Задача Коши.
73. Дифференциальные уравнения первого порядка, решаемые в квадратурах: уравнения с разделенными и разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнение Бернулли.

Методические указания студентам

Учиться преодолевать самый высокий уровень непонимания материала («непонятно, что непонятно»).

При разборе примеров в аудитории или в рамках выполнения домашних заданий целесообразно каждый шаг обосновывать теми или иными теоретическими положениями.

При изучении теоретического материала не заикливаться на трудных и непонятных местах, смело их пропускать и двигаться дальше, а затем возвращаться к тому, что было пропущено (часто последующее проясняет предыдущее).

При чтении учебников и лекционных записок активно метить карандашом непонятные места. Карандаш легко стирается, когда вопрос можно снять.

С первых студенческих дней конструировать собственный стиль понимания сути изучаемого материала. Математические дисциплины в этой ситуации являются наиболее успешным полигоном.